



**Institución Educativa Juan XXIII**  
Resolución de Aprobación 11 75 del 31 de octubre de 2012  
Resolución de Aprobación Media Técnica: 1263 del 7 de febrero de 2017  
DANE: 105001006556 – NIT: 900585184-1

<b>ASIGNATURA/AREA: CALCULO</b>	<b>FECHA: Octubre de 2024</b>
<b>PERIODO: 2 de 2024</b>	<b>GRADO: 11° (11°1, 11°2 )</b>
<b>NOMBRE DEL DOCENTE: Jaime Buelvas</b>	
<b>NOMBRE DEL ESTUDIANTE:</b>	
<b>FECHA DE ENTREGA: Octubre 31 de 2024</b>	<b>FECHA DE SUSTENTACIÓN: Según horario organizado por coordinación.</b>
<b>LOGROS:</b> Límites de funciones: Límites directos, límites indeterminados, Indeterminación de la forma cero sobre cero aplicando la factorización	
<b>Recursos: Hojas de bloc, lápiz, borrador, regla, lápices de colores, textos de matemáticas e internet.</b>	

### PLAN DE APOYO

#### ACTIVIDADES

<b>OBSERVACIONES:</b>	
<b>FECHA DE ENTREGA DEL TRABAJO</b>	<b>FECHA DE SUSTENTACIÓN</b>
<b>NOMBRE DEL EDUCADOR</b> <i>Jaime Buelvas</i>	<b>FIRMA DEL EDUCADOR</b>

#### TEORÍA, EXPLICACIONES Y BIBLIOGRAFÍA

## LÍMITES

### INTRODUCCIÓN

Analicemos la posible gráfica que generaría la función:

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}, \quad x \neq 1$$

Para cualquier punto de  $x$  diferente de 1, se pueden utilizar varios procedimientos como el de asignar valores arbitrarios a  $x$ , para hallar los valores de  $f(x)$ , pero en el punto  $x = 1$ , se hace un poco difícil el análisis de la gráfica, entonces para observar el real comportamiento de la gráfica de  $f(x)$ , cerca del punto  $x = 1$ , consideramos dos grupos de valores de  $x$ .



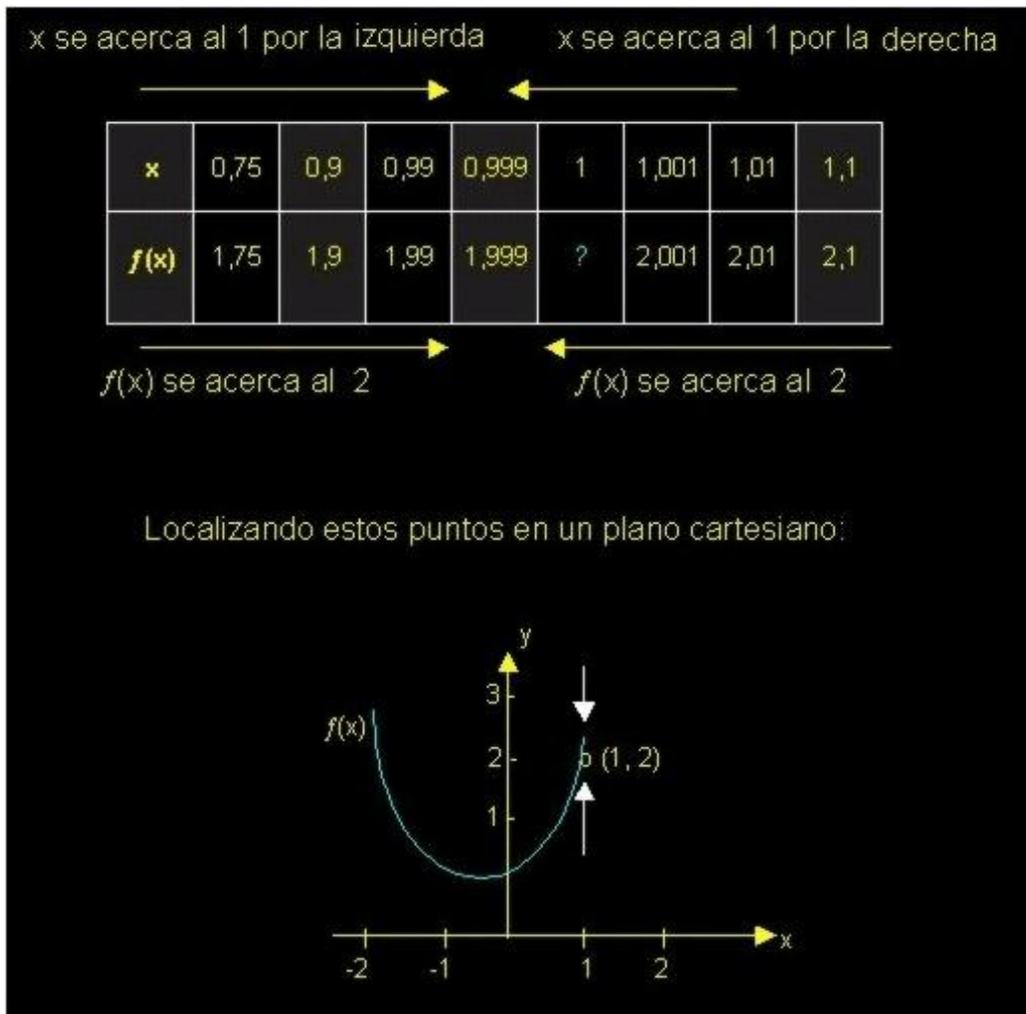
# Institución Educativa Juan XXIII

Resolución de Aprobación 11 75 del 31 de octubre de 2012  
Resolución de Aprobación Media Técnica: 1263 del 7 de Febrero de 2017

DANE: 105001006556 – NIT: 900585184-1

Uno de los grupos sería el conjunto de números que se aproximen a uno por la izquierda y el otro, el conjunto de números que se aproximen por la derecha.

Para lo cual se crea una tabla de valores para los dos conjuntos de números:



Al localizar los puntos correspondientes se observa que la gráfica de  $f$ , es una parábola con un hueco en el punto  $(1, 2)$ . Se puede concluir que aunque  $x$  no puede ser igual a 1 nos podemos acercar cuanto queramos a 1, y como resultado de este acercamiento,  $f(x)$  se aproxima cada vez más a 2. Utilizando la notación de límites se dice entonces que el límite de  $f(x)$  cuando  $x$  tiende a 1 es 2, y se denota como:

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$$

Otra forma de resolver el límite:

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}, \quad x \neq 1$$



# Institución Educativa Juan XXIII

Resolución de Aprobación 11 75 del 31 de octubre de 2012  
Resolución de Aprobación Media Técnica: 1263 del 7 de Febrero de 2017

DANE: 105001006556 – NIT: 900585184-1

es desarrollando el cociente:

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x+1)(x-1)}{x-1} = x+1$$

$$\text{Reemplazando: } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1+1 = 2$$

Que es la forma algebraica y más práctica de resolver esta clase de límites.

## DEFINICIÓN DE LÍMITE

El límite de una función, se puede expresar mediante la norma de que si  $f(x)$ , se aproxima a un único número  $L$ , cuando  $x$  se aproxima a  $c$  por ambos lados, decimos que el límite  $f(x)$  cuando  $x$  tiende a  $c$  es  $L$ , y se denota por la expresión:

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$$

Ejemplos resueltos de límites directos o algebraicos

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 5} (2x^3 - 3x + 1) &= \lim_{x \rightarrow 5} (2x^3) - \lim_{x \rightarrow 5} (3x) + \lim_{x \rightarrow 5} (1) && \text{Suma de funciones} \\ &= 2 \lim_{x \rightarrow 5} (x^3) - 3 \lim_{x \rightarrow 5} (x) + \lim_{x \rightarrow 5} (1) && \text{Constante por una función} \\ &= 2(5^3) - 3(5) + 1 && \text{Función elevada a un exponente} \\ &= 236 && \text{Evalúe} \end{aligned}$$

Evalúe  $\lim_{x \rightarrow 3} (5x^2)$ .

### Solución

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} (5x^2) &= 5 \lim_{x \rightarrow 3} (x^2) && \text{Constante por una propiedad de la función} \\ &= 5(3^2) && \text{Función elevada a una propiedad de exponente} \\ &= 45 \end{aligned}$$

Ejemplos resueltos: Límites indeterminados



**Institución Educativa Juan XXIII**  
Resolución de Aprobación 11 75 del 31 de octubre de 2012  
Resolución de Aprobación Media Técnica: 1263 del 7 de Febrero de 2017

DANE: 105001006556 – NIT: 900585184-1

$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x-5}{x^2-25}$  indeterminación de la forma  $\left\{ \frac{0}{0} \right\}$ . Para evitarla, descomponemos en factores numerador y denominador, simplificamos y por último sustituimos  $x$  por 5:

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x-5}{x^2-25} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x-5}{(x+5)(x-5)} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{1}{x+5} = \frac{1}{10}$$

$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-2x}{x^2-4x+4}$  indeterminación de la forma  $\left\{ \frac{0}{0} \right\}$ . Para evitarla, descomponemos en factores numerador y denominador, simplificamos y por último sustituimos  $x$  por 2:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-2x}{x^2-4x+4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x(x-2)}{(x-2)^2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x}{(x-2)} = \pm\infty$$

### Evaluar el límite de un cociente mediante factorización

Evalúe  $\lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{x^2-6x+8}{x-2} \right)$ .

#### Solución

Factorice cuando sea posible, y simplifique.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{x^2-6x+8}{x-2} \right) &= \lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{(x-2)(x-4)}{x-2} \right) && \text{Factorice el numerador.} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{\cancel{(x-2)}(x-4)}{\cancel{x-2}} \right) && \text{Anule los factores comunes.} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} (x-4) && \text{Evalúe.} \\ &= 2-4 = -2 \end{aligned}$$



**Institución Educativa Juan XXIII**  
Resolución de Aprobación 11 75 del 31 de octubre de 2012  
Resolución de Aprobación Media Técnica: 1263 del 7 de Febrero de 2017

DANE: 105001006556 – NIT: 900585184-1

**EJERCICIOS O TALLER PARA ESTUDIAR**

**INDICACIONES**

**El siguiente taller es un mecanismo de estudio, la evaluación para recuperar el tercer periodo se sacará con ejercicios parecidos a este taller**

**Este taller NO se entrega, la recuperación es una evaluación, por lo tanto la familia debe verificar que el estudiante realmente estudie a conciencia**

Cada estudiante en supervisión del acudiente o padre de familia de ponerse al día con las actividades realizadas en clases y las diversas consultas y tareas planteadas, ponerse al día con el cuaderno con todas las actividades desarrolladas a la fecha

Estudiar las competencias desarrolladas con los temas estudiados en el periodo:

Corregir, estudiar y analizar la evaluación de periodo y las actividades evaluadas en clase

Presentar la evaluación de plan de apoyo en la fecha programada por la Institución, la calificación sacada en la evaluación es la nota que quedará como definitiva del periodo como plan de apoyo

Se insta a la familia a hacer el acompañamiento respectivo para que el estudiante alcance los desempeños del área

Taller para prepararse para la evaluación  
**NO es para entregar**

**Parte A: Límites directos.** Resolver de forma directa, reemplazando la variable, realizando las operaciones y hallar el límite siempre y cuando exista.

1.  $\lim_{x \rightarrow 1} 4$

2.  $\lim_{x \rightarrow -1} 2x$

3.  $\lim_{x \rightarrow -3} -3x$

4.  $\lim_{x \rightarrow 0} 4 \cdot x^2$

5.  $\lim_{x \rightarrow 3} -6 \cdot x^6$

6.  $\lim_{x \rightarrow 3} -\frac{5}{8} \cdot x^4$

7.  $\lim_{x \rightarrow -2} 6\sqrt{2} \cdot x^5$

8.  $\lim_{x \rightarrow 1} 4x^3$

9.  $\lim_{x \rightarrow -1} (4x^3 + x^2 + 2x + 1)$

10.  $\lim_{x \rightarrow 5} (2x^3 - 3x^2 - x - 4)$

11.  $\lim_{x \rightarrow -3} (x^3 + x^2 + 2x + 6)$

12.  $\lim_{x \rightarrow 2} (5x^3 - x^2 - 3)$

13.  $\lim_{x \rightarrow -1} (2x^3 + x + 7)$



**Institución Educativa Juan XXIII**  
Resolución de Aprobación 11 75 del 31 de octubre de 2012  
Resolución de Aprobación Media Técnica: 1263 del 7 de Febrero de 2017

DANE: 105001006556 – NIT: 900585184-1

Reuelva con denominadores

1.  $\lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{x^3 + 2x + 3}{x^2 + 5} \right)$

2.  $\lim_{x \rightarrow -1} \left( \frac{2x + 1}{x^2 - 3x + 4} \right)$

3.  $\lim_{x \rightarrow -3} \left( \frac{x^2 - 9}{2x^2 + 7x - 3} \right)$

4.  $\lim_{x \rightarrow 4} \left( \frac{x^2 - 4x + 1}{3x^2 - 2x + 1} \right)$

5.  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{x^2 - 3x}{x + 1} \right)$

6.  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{4x - 1}{2x^2 - 3x + 4} \right)$

7.  $\lim_{x \rightarrow 3} \left( \frac{3x^2 - 1}{4x^2 + 2} \right)$

8.  $\lim_{x \rightarrow -5} \left( \frac{x^3 - 5}{3x^3 + x^2 - 5} \right)$

9.  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{x^3 - 4x^2 + x - 1}{2x^2 + 4x - 1} \right)$

**Parte B: Límites indeterminados.** Resolver los límites de forma directa, luego factorizar para eliminar las interminaciones y hallar el límite

1.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^2+3x-10}$

2.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 4} =$

3.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^2-3x+2}$

4.  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2+4x+4}{x^2-4}$

5.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3+4x^2-x}{x^2-4x}$

6.  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-9}{x^2-3x}$

7.  $\lim_{y \rightarrow 5} \frac{25-y^2}{y^2-4y-5}$

8.  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{x^2-1}$

9.  $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x-5}{x^2-25}$

10.  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2+x-12}{x^2-3x}$

11.  $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + 5x + 6}{x + 3}$

12.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-2x}{x^2-4x+4}$

13.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 1}$

14.  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 - 1}$

15.  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x + 1}$



**Institución Educativa Juan XXIII**  
Resolución de Aprobación 11 75 del 31 de octubre de 2012  
Resolución de Aprobación Media Técnica: 1263 del 7 de Febrero de 2017

DANE: 105001006556 – NIT: 900585184-1

16.  $\lim_{x \rightarrow -5} \frac{x^2 + 7x + 10}{x + 5}$  ;      17.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 4x}{x}$       18.  $\lim_{x \rightarrow -3/2} \frac{4x^2 - 9}{2x + 3}$

19.  $\lim_{m \rightarrow 1} \frac{3m^2 - 3}{m - 1}$       20.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)^2}{x^2 - 4}$       21.  $\lim_{t \rightarrow 3} \frac{t^2 - 9}{t^2 - 5t + 6}$

22.  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 2x + 1}{x + 1}$       23.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{x^2 + x - 6}$

**Bibliografía y recursos digitales**

<https://www.youtube.com/watch?v=o2UTk8bsLS0&list=PLeySRPnY35dG9t51yT4nCwQEtWwCwvBwn>

<https://www.youtube.com/watch?v=nTaiyaoyJhw&list=PLeySRPnY35dG9t51yT4nCwQEtWwCwvBwn&index=2>

<https://www.youtube.com/watch?v=B-MTbS2SSx0>

<https://www.youtube.com/watch?v=kRaL0widcCY>

<https://www.youtube.com/watch?v=yptVvhFVFlo&list=PLZeRcx60JO51neoi3w9S0JP7vMf4iWpDe>

<https://www.youtube.com/watch?v=anzGLXxZnDg>

Nota: Recordar que la recuperación es una evaluación sobre este taller, no debe entregarlo, sino resolverlo a conciencia para la evaluación